Teoria przestrzeni Hilberta

Lista 1 (formy kwadratowe, przestrzenie unitarne)

Zad 1. Niech H będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych.

a) Czy suma lub iloczyn dwóch form kwadratowych jest formą kwadratową?

b) Czy iloczyn przez liczbę formy kwadratowej jest formą kwadratową?

c) Czy granica ciągu form kwadratowych jest formą kwadratową?

Zad 2. Pokazać, że w przestrzeni rzeczywistej forma kwadratowa nie wyznacza jednoznacznie formy dwuliniowej, tzn. istnieją formy dwuliniowe φ, ψ takie, że $\varphi \neq \psi$ oraz $\hat{\varphi} = \hat{\psi}$.

Zad 3. Które z podanych funkcjonałów φ są iloczynami skalaranymi w przestrzeni X?

	$\varphi(x,y)$	X		$\varphi(x,y)$	X
a)	$x_1 + x_2 + y_1 + y_2$	$\mathbb{R}^2$	h)	$3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$	$\mathbb{R}^2$
b)	$x_1y_1 + x_2y_2 + 1$	$\mathbb{R}^2$	i)	$2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$	$\mathbb{R}^3$
c)	$x_1y_1 + 2x_2y_2$	$\mathbb{R}^2$	j)	$x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$	$\mathbb{R}^2$
d)	$x_1y_1 + x_2y_2$	$\mathbb{R}^3$	k)	$x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$	$\mathbb{R}^2$
e)	$\sum_{i=1}^3 x_iy_i + \sum_{i,j=1}^3 x_iy_j$	$\mathbb{R}^3$	l)	$3\sum_{i=1}^3 x_iy_i - \sum_{i,j=1}^3 x_iy_j$	$\mathbb{R}^3$
f)	$\mathrm{Re}\,(z_1w_1) + \mathrm{Im}\,(z_2w_2)$	$\mathbb{C}^2$	m)	$z_1\overline{w}_1 + iz_1\overline{w}_2 - iz_2\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2$	$\mathbb{C}^2$
g)	$z_1w_1 + z_2w_2$	$\mathbb{C}^2$	n)	$2z_1\overline{w}_1 - z_1\overline{w}_2 - z_2\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2$	$\mathbb{C}^2$

Zad 4. Niech H będzie przestrzenią unitarną i niech $x, y \in H$. Pokazać, że jeśli $x \perp y$, to

a) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, b) $\|x+y\| = \|x-y\|$,

Wykazać, że jeśli H jest przestrzenią rzeczywistą, to prawdziwe są także implikacje odwrotne, jeśli zaś H jest przestrzenią zespoloną to imlpikacje odwrotne nie zachodzą.

Zad 5. Niech H będzie zespoloną przestrzenią unitarną i niech $x, y \in H$. Pokazać, że następujące warunki są równoważne

a) $x \perp y$, b) $\|x+y\|^2 = \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, c) $\forall_{t\in\mathbb{C}}\ \|x+ty\| = \|x-ty\|$.

Zad 6. Udowodnić, że dla nieujemnej, symetrycznej formy półtoraliniowej φ na przestrzeni liniowej V zachodzi nierówność Schwartza, tzn.

$$|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y).$$

dla dowolnych $x, y \in V$. Wyciągnąć stąd wniosek, że

$$\{x \in V : \hat{\varphi}(x) = 0\} = \{x \in V : \varphi(x,y) = 0, \quad \text{dla każdego } y \in V\},$$

i $E := \{x \in V : \hat{\varphi}(x) = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową V. Forma φ faktoryzuje się do iloczynu skalranego określonego na przestrzeni ilorazowej V/E i dlatego, parę (V, φ) nazywa się *przestrzenią preunitarną*.

Zad 7. Wykazać, że przestrzeń unitarna H wraz z normą $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ stanowi przestrzeń unormowaną oraz że iloczyn skalarny w tej przestrzeni jest ciągły (jako funkcja dwóch zmiennych).

Zad 8. Niech H będzie zespoloną przestrzenią unitarną i niech $x, y, z \in H$. Pokazać, że

a) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff x = \alpha y$ dla pewnego $\alpha \geq 0$

b) $\|x-z\| = \|x-y\| + \|y-z\| \iff y = \alpha x + (1-\alpha)z$ dla pewnego $\alpha \in [0,1]$

Zad 9. Oczywiście zespoloną przestrzeń liniową V możemy traktować również jako przestrzeń rzeczywistą. Udowodnić, że

a) między funkcjonałami $\mathbb{C}$-liniowymi oraz $\mathbb{R}$-liniowymi na V istnieje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość dana przez równość

$$f(x) = u(x) - iu(ix),$$

b) równość

$$\varphi(x,y) = u(x,y) + iu(x,iy),$$

ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między formami $\mathbb{C}$-półtoraliniowymi φ oraz $\mathbb{R}$-dwuliniowymi u na V takimi, że $u(ix,y) = -u(x,iy)$.